Числовая прямая

Будем считать, что понимаем, как множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел строится с помощью десятичных дробей и на нём все арифметические операции определены корректно.

1. Докажите, что у каждого ограниченного подмножества $M \subset \mathbb{R}$ есть супремум (и инфимум).
2. Докажите, что в любой последовательности вложенных отрезков числовой прямой, такой что их длины стремятся к нулю, есть, и притом ровно одна, общая точка.
3. Докажите, что у любой бесконечной последовательности есть бесконечная монотонная подпоследовательность.
4. Пусть M – бесконечное подмножество точек отрезка $[a, b]$. Докажите, что существует такая точка $x \in [a, b]$, что для любого интервала $I \ni x$ пересечение $I \cap M$ бесконечно.
5. **Компактность отрезка в $\mathbb{R}$.** Отрезок $[a, b]$ покрыт набором интервалов $(I_\alpha)_{\alpha \in M}$. Докажите, что есть конечное подмножество $P \subset M$, такое что $[a, b] \subset (I_\alpha)_{\alpha \in P}$.
6. Про функцию $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ известно, что для любой точки $x \in [a, b]$ существует интервал $I \supset x$, на котором функция f ограничена. Докажите, что f ограничена на всём $[a, b]$.
7. Для отрезка $[a, b]$ интервал $(\frac{2a+b}{3}, \frac{a+2b}{3})$ назовём *средней третью.* Из отрезка $[0, 1]$ вырезали среднюю треть, затем у каждого из двух оставшихся отрезков вырезали среднюю треть, потом у каждого из оставшихся четырёх отрезков вырезали среднюю треть и так до бесконечности. Выясните, счётно или нет множество всех невырезанных точек.
8. **Теорема Хелли на $\mathbb{R}$.** На числовой прямой отметили $n \in \mathbb{N}$ промежутков, каждые два из которых пересекаются. Докажите, что все промежутки имеют общую точку.
9. Докажите, что утверждение задачи 8 верно для бесконечного числа отрезков и не всегда верно для бесконечного числа даже ограниченных интервалов.